

Országos Matematikaolimpia  
Megyei forduló - 2026. március 7.

## XII. OSZTÁLY

**1. feladat.** Az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer deriválható függvény kétszeres deriváltja folytonos  $\mathbb{R}$ -en, és teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

$$\int_0^1 f(x) dx = 0 \quad \text{és} \quad \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot f(x) dx.$$

a) Bizonyítsd be, hogy ha  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  másodfokú polinomfüggvény, amelynek grafikus képe szimmetrikus az  $x = \frac{1}{2}$  egyenletű egyenesre nézve, akkor

$$\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = 0.$$

b) Bizonyítsd be, hogy létezik olyan  $c \in (0, 1)$ , amelyre  $f''(c) = 0$ .

*Gazeta Matematică*

**2. feladat.** a) Legyen  $(G, \cdot)$  egy csoport, és  $f : G \rightarrow G$  annak egy endomorfizmusa. Igazold, hogy az  $f$  endomorfizmus fixpontjainak  $F_f = \{x \in G \mid f(x) = x\}$  halmaza a  $G$  csoport egy részcsoporthja.

b) Legyen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , és jelölje  $p$  az  $n$  legkisebb prímosztóját. Bizonyítsd be, hogy az  $m = \frac{n}{p} + 1$  szám a legkisebb olyan természetes szám, amelyre teljesül a következő tulajdonság: bármely  $n$ -edrendű véges  $(G, \cdot)$  csoportban, ha egy  $f : G \rightarrow G$  endomorfizmushoz létezik egy  $g : G \rightarrow G$  automorfizmus úgy, hogy az  $A = \{a \in G \mid f(a) = g(a)\}$  halmaznak legalább  $m$  eleme van, akkor  $f$  a  $G$  csoport automorfizmusa.

**3. feladat.** Legyen  $e$  a  $(G, \cdot)$  csoport semleges eleme, és legyen  $H$  a  $G$  egy részcsoporthja úgy, hogy  $H \neq \{e\}$  és  $H \neq G$ . Ha  $(xy)^2 = yx$  minden  $x, y \in G \setminus H$  esetén, bizonyítsd be, hogy:

a)  $x^2 = y^3$ , minden  $x \in G \setminus H$  és minden  $y \in H$  esetén;

b)  $Z(G) = \{e\}$ ;

c)  $H$  kommutatív. ( $Z(G) = \{z \in G \mid z \cdot g = g \cdot z, \forall g \in G$  a  $G$  csoport *centruma*, vagyis a  $G$  csoport azon elemeinek halmaza, amelyek a  $G$  csoport minden elemével kommutálnak.)

**4. feladat.** Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  folytonos és bijektív függvény, amelyre

$$f(x) < x, \quad \text{minden } x \in (0, 1) \text{ esetén.}$$

Minden  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén jelölje  $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$  és  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

a) Bizonyítsd be, hogy minden  $x \in (0, 1)$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

b) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket!

*Munkaidő 3 óra.*

*Minden feladatra legfeljebb 22,5 pont szerezhető.*